MULTIMI DENSE

\#

1. Mulțimi dense

1.1. Mulțimi dense

Rezultatul de bază este teorema lui Kronecker care joacă un rol important în teoria numerelor. Această teoremă este interesantă şi din alt punct de vedere deoarece cu ajutorul ei se pot rezolva uşor unele probleme dificile cu enunţ elementar.

1.1.1. Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte densă în $\mathbb{R}$ dacă orice element din $\mathbb{R}$ este limita unui şir neconstant cu elemente din A.

Facem precizarea că mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R}$ dacă pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ şi orice vecinătate V a punctului a, avem $V \cap A$ este infinită.

1.1.2. Propoziție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ orice interval $I \subset \mathbb{R}$, de lungime nenulă, conține cel puțin un număr din A.

Demonstrație. "$\Rightarrow$" Presupunem că A este densă în $\mathbb{R}$. Trebuie demonstrat că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $x \in A$ astfel ca $a < x < b$. Presupunem contrariul. Atunci $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ astfel încât $(\forall)\, x \in A$ să avem că

$$x \notin (\alpha, \beta). \qquad (1)$$

Luăm $u = \dfrac{\beta + \alpha}{2} \in (\alpha, \beta)$. Cum A este densă în $\mathbb{R}$, există un şir (x_n) de elemente din A astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = u$. De aici rezultă că $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ să avem $x_n \in (\alpha, \beta)$ deoarece (α, β) este o vecinătate pentru u. Aceasta este o contradicție cu presupunerea făcută (1), de aceea obținem concluzia dorită.

"$\Leftarrow$" Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în intervalul $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}, \alpha + \dfrac{1}{n}\right)$ se găseşte cel puțin un element $a_n \in A$, conform ipotezei. Cum $\alpha - \dfrac{1}{n} < a_n < \alpha + \dfrac{1}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, cu teorema cleştelui, se obține $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. De unde rezultă că mulțimea A este densă în $\mathbb{R}$. Cu aceasta demonstrația se încheie.

1.1.3. Exemplu. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $a + n > 0$. Fie numerele $a_1 = a + n$, $b_1 = b + n$. De aici $b_1 - a_1 = b - a > 0$ şi

atunci putem găsi un $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k(b_1 - a_1) > 1 \Leftrightarrow 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$. Fie m cel mai mic număr natural cu proprietatea $m > k \cdot a_1$ şi deci $m - 1 \le k \cdot a_1$ sau $m \le 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$. În acest mod se obţine

$$k \cdot a_1 < m < k \cdot b_1 \Leftrightarrow a_1 < \frac{m}{k} < b_1 \Leftrightarrow a + n < \frac{m}{k} < b + n \Leftrightarrow a < \frac{m}{k} - n < b,$$

cu $\frac{m}{k} - n \in \mathbb{Q}$.

1.1.4. Exemplu. Mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a numerelor iraţionale este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Dacă $\alpha = 0$, atunci există $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, $(\forall)\ n \ge 1$ de elemente din $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \alpha$. Dacă $\alpha \ne 0$, atunci din faptul că $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$ rezultă că există $(a_n)_{n\ge 0}$ un şir de numere raţionale astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \cdot \alpha \in \mathbb{R}^*$. Presupunem în continuare că $a_n \ne 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ (în caz contrar, avem un număr finit de termeni nuli (limita fiind nenulă) şi se poate renunţa la aceştia). Luăm şirul $(b_n)_{n\ge 0}$, $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{a_n}{2} \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi avem $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \alpha}{2} = \alpha$. Aşadar, orice element din $\mathbb{R}$ este limita unui şir de elemente din $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$, deci $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.5. Exemplu. Demonstraţi că dacă A este densă în $\mathbb{R}$ iar $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}^*$, atunci şi mulţimile

$$A_1 = \{r_1 + a \mid a \in A\} \text{ şi } A_2 = \{r_2 \cdot a \mid a \in A\}$$

sunt dense în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci $\alpha - r_1 \in \mathbb{R}$ şi cum A este densă în $\mathbb{R}$, rezultă că există un şir $(x_n)_{n\ge 0}$ de elemente din A astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha - r_1$. De aici rezultă că $\lim_{n\to\infty}(x_n + r_1) = \alpha$ şi cum $x_n + r_1 \in A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, va rezulta că A_1 este densă în $\mathbb{R}$.

Analog, pentru $\beta \in \mathbb{R}$, arbitrar, există un şir $(y_n)_{n\ge 0}$ de elemente din A astfel încât $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\beta}{r_2}$, adică $\lim_{n\to\infty}(r_2 \cdot y_n) = \beta$ şi cum $r_2 \cdot y_n \in A_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, va rezulta că A_2 este densă în $\mathbb{R}$.

Back

#

1.1.6. Teoremă. (teorema lui Dirichlet). *Dacă α este irațional și $p \in \mathbb{N}^*$, atunci există $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq p$ astfel încât*

$$|\alpha \cdot m - n| \leq \frac{1}{p}.$$

Demonstrație. Împărțim intervalul $[0,1]$ în p intervale egale de lungime p, $I_1 = \left[0, \frac{1}{p}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right], \ldots, I_p = \left[\frac{p-1}{p}, 1\right]$ și considerăm numerele $x_1 = \alpha - [\alpha]$, $x_2 = 2\alpha - [2\alpha], \ldots, x_{p+1} = (p+1)\alpha - [(p+1)\alpha]$. Aceste $p+1$ numere se află în intervalul $[0,1) \subset [0,1]$. Cum intervalul $[0,1]$ a fost împărțit în p intervale ca și mai sus, va rezulta că cel puțin două numere sunt situate în același interval. Presupunem că acestea sunt $k\alpha - [k\alpha]$ și $l\alpha - [l\alpha]$ cu $k, l \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$ și $k > l$. Distanța dintre ele nu poate depăși lungimea intervalului în care se află, adică $\frac{1}{p}$, prin urmare

$$|(k\alpha - [k\alpha]) - (l\alpha - [l\alpha])| \leq \frac{1}{p} \Leftrightarrow |(k - \alpha)l - ([k\alpha] - [l\alpha])| \leq \frac{1}{p}.$$

Luăm $m = k - l \in \mathbb{N}^*$ și $n = [k\alpha] - [l\alpha] \in \mathbb{Z}$. Aceste numere îndeplinesc cerințele din concluzia teoremei căci $m \leq p + 1 - 1 = p$.

Back

#

1.1.7. Teoremă. (teorema lui Kronecker). *Dacă α este irațional, atunci mulțimea*

$$A = \{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a < m_1\alpha + n_1 < b$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $d = b - a$ lungimea intervalului $[a, b]$. Atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{p} \leq d$ (de exemplu $p = \left[\frac{1}{d}\right] + 1$). Din teorema lui Dirichlet, există $m \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|m\alpha - n| < \frac{1}{p} \leq d$. Deoarece $m\alpha - n$ este irațional rezultă imediat că $m\alpha - n \neq 0$. În continuare vom propune că $m\alpha - n > 0$ și $a > 0$ (analog se va proceda și în celelalte situații). Numerele $u, 2u, 3u, \ldots, ku, \ldots$, $u = m\alpha - n$, sunt distincte două câte două și cel puțin unul îl depășește pe a (cel pentru care

$k \ge \left[\dfrac{a}{u}\right]+1$). Demonstrăm că cel mai mic dintre numerele care îl depăşeşte pe a, fie acesta $k_1 \cdot u$, aparţine intervalului (a, b).

Într-adevăr, din alegerea lui k_1 avem $(k_1 - 1)u \le a$. Dacă am avea $k_1 \cdot u > b$, atunci $k_1 u - (k_1 - 1)u > b - a = d$, în contradicţie cu $m\alpha - n < d$. Deoarece numărul $k_1 u = (mk_1)\alpha + (-nk_1) \in (a, b)$ şi $mk_1, -nk_1 \in \mathbb{Z}$, atunci luăm $m_1 = mk_1$, $n_1 = -nk_1$ şi avem $a < m_1\alpha + n_1 < b$ iar teorema este demonstrată.

1.1.8. Observaţie. Se poate demonstra că dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci mulţimea

$$B = \left\{ m\alpha - n \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.9. Definiţie. Fie A şi B două mulţimi astfel încât $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Se spune că mulţimea A este densă în mulţimea B dacă pentru orice $b \in B$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $A \bigcap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \ne \varnothing$.

1.1.10. Observaţii. 1) Mulţimea A este densă în mulţimea B dacă pentru orice $b \in B$, una din afirmaţiile următoare este adevărată

a) $b \in A$

b) $b \notin A$ dar există un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in A$, $a_n \ne b$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$;

2) Facem precizarea că observaţia anterioară este în concordanţă cu definiţia 1.1.1.

1.1.11. Propoziţie. Dacă $A \subset B \subset \mathbb{R}$ şi mulţimea A este densă în B, iar $f : B \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea $f(A)$ este densă în mulţimea $f(B)$.

Demonstraţie. Fie $y \in f(B)$ arbitrar. Atunci, există $b \in B$ astfel încât $y = f(b)$. Deoarece f este continuă, pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ dacă $x \in (b - \delta, b + \delta) \bigcap B$. Cum A este densă în B, există $a \in A \bigcap (b - \delta, b + \delta)$ şi atunci $f(a) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, deci $f(A) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \ne \varnothing$ şi demonstraţia este încheiată.

1.1.12. Definiţie. Fie C un cerc în planul P şi $A \subset C$ o mulţime. Spunem că mulţimea A este densă pe cercul C, dacă pentru orice $C \in C$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$D(C, \varepsilon) \bigcap A \ne \varnothing,$$

unde $D(C, \varepsilon) = \left\{ X \in P \mid d(X, C) < \varepsilon \right\}$ reprezintă discul de centru C şi rază ε din planul P.

1.1.13. Propoziție. Fie $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ cercul trigonometric ale cărui puncte le putem privi şi ca numere complexe. Considerăm pe acest cerc un şir de puncte $(A_n) n \in \mathbb{N}$, plasate pe cerc în sens trigonometric şi astfel încât fiecare arc dintre două puncte consecutive A_i şi A_{i+1} să aibă aceeaşi lungime $a > 0$, $(l(\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}) = a > 0)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Atunci avem

a) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$ atunci şirul $(A_n) n \in \mathbb{N}$ este periodic;

b) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci mulţimea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă pe cerc, dar nu există nici un poligon regulat cu vârfurile în mulţimea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstrație. a) Dacă $a = \dfrac{p}{q} \cdot \pi$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, atunci $2qa = 2p \cdot \pi$ şi mulţimea $A_k = A_{k+2q}$, $k \in \mathbb{N}$, adică şirul are perioada $2q$.

c) Dacă $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci arătăm că şirul este format din puncte distincte. Dacă, prin absurd $A_k = A_{k+m}$ atunci $ma = p \cdot 2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, deci $a = \dfrac{2p}{m} \in \mathbb{Q}$, contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{2\pi}{k} < \varepsilon$. Printre punctele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ există două puncte pentru care $l(\overset{\frown}{A_i, A_j}) \leq \dfrac{2\pi}{k} < \varepsilon$

Dacă $i = j + p$, atunci punctele $A_j, A_{j+p}, \ldots, A_{j+kp}, \ldots$ sunt echidistante pe cerc şi distanța dintre două puncte consecutive este mai mică decât ε. În orice disc $D(C, \varepsilon)$ cu C pe cerc există cel puțin un punct din şir. Să arătăm că nu există poligoane regulate cu toate vârfurile în punctele din şir.

Dacă prin absurd $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}$ ar fi vârfurile unui poligon regulat cu p vârfuri, atunci am avea $n_2 - n_1 = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{p}$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $\pi = \dfrac{p(n_2 - n_1)}{2kp + 2} \in \mathbb{Q}$, contradicție.

1.1.14. Propoziție. Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pozitive cu proprietățile $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \infty$, atunci şirul

$(\{a_1+a_2+\ldots+a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ este dens în $[0,1]$, unde s-a notat $\{a_1+a_2+\ldots+a_n\}$ partea zecimală a numerelor $a_1+a_2+\ldots+a_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Demonstrație. Fie $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ și $c_n=\{b_n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Vom arăta că în orice interval $(a,b)\subset[0,1]$ există elemente din șirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Fie $\varepsilon=\min\{a,b-a,1-b\}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, există $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $0<a_n<\varepsilon$ pentru orice $n\geq N_\varepsilon$, $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $c_{n_0}\in[0,a]$ mai putem adăuga termeni astfel încât să ajungem în intervalul (a,b) (există n minim, notat n_0, pentru care $c_n<a<c_{n+1}$ și atunci $c_{n+1}<b$).

Dacă $c_{n_0}\in[b,1]$ mai adăugăm la b_{n_0} termeni ai căror sumă să depășească $1-b+a$ (lucru posibil deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$) și ajungem cu c_n în intervalul (a,b).

Back